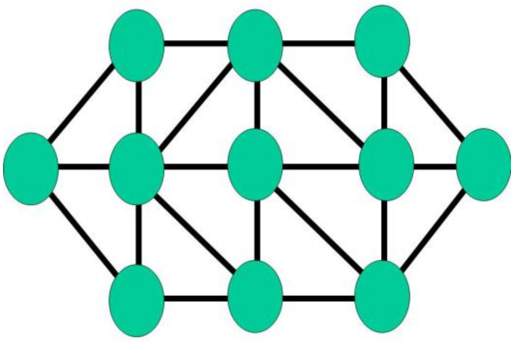
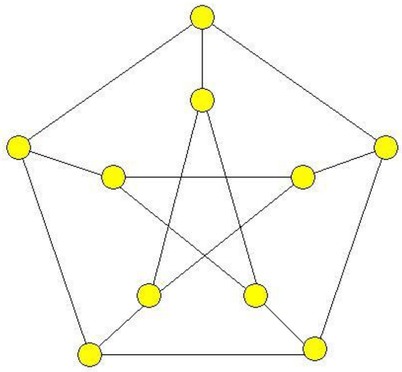
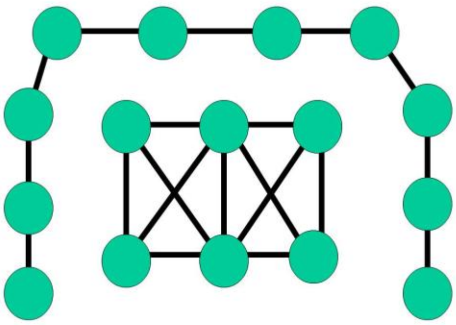
THEORIE DES GRAPHES
TD N°6

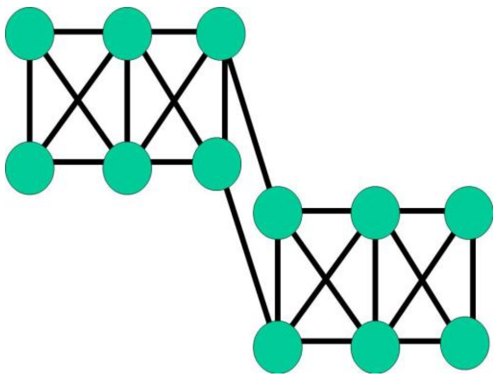
Exercice 1 : Déterminer α et β, γ et q pour les 4 graphes suivants :





GRAPHE DE PETERSEN





Exercice 2 : Montrer que $\alpha(G) \leq \theta(G)$

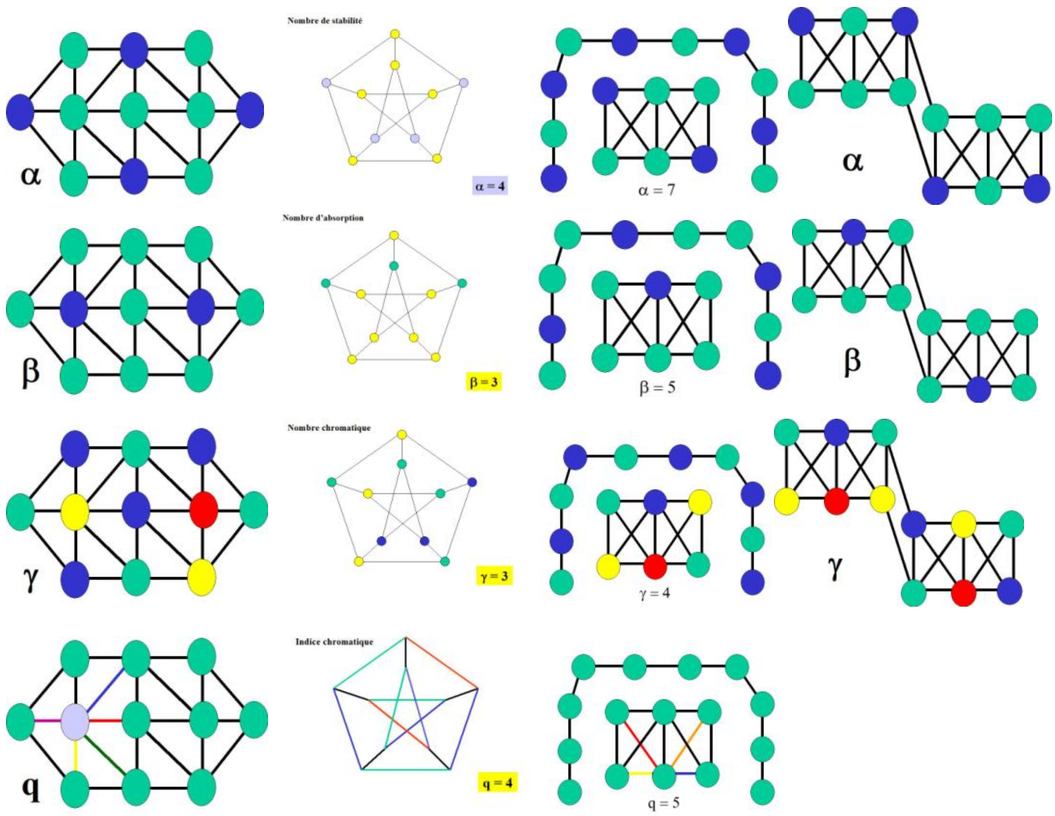
Exercice 3 : Montrer que $\beta(G) \geq n-m$

Exercice 4 : Montrer que $\gamma(G) \times \alpha(G) \geq n$

Exercice 5 : Montrer que $\gamma(G) + \alpha(G) \leq n+1$

CORRECTION

Exercice 1 :



Exercice 2 : Montrer que $\alpha(G) \leq \theta(G)$

Considérons une partition en θ cliques C_1, $C_2, \ldots$ C_θ et un ensemble stable S.
Dans S, il ne peut y avoir 2 sommets appartenant au même C_i.
Donc le cardinal de S est inférieur ou égal à θ.
C'est vrai pour tout ensemble stable, y compris pour un maximal de cardinal α, d'où la propriété.

Exercice 3 : Montrer que $\beta(G) \geq n\text{-}m$

Considérons A un ensemble absorbant minimal, donc de cardinal $\boldsymbol{\beta}$**.**
Les sommets restants sont au nombre de n-β et sont reliés aux sommes de A.
Il faut donc au moins n-β arcs.

Exercice 4 : Montrer que $\gamma(G) \times \alpha(G) \geq n$

Considérons une coloration admissible en γ couleurs et notons C_i l'ensemble des sommets de couleur i.
Chaque C_i est un ensemble stable, et donc son cardinal est inférieur ou égal à α.
La réunion des C_i représente l'ensemble des sommets du graphe et les C_i sont 2 à 2 disjoints.
La somme des cardinaux des C_i et donc égale à n d'où la proposition.

Exercice 5 : Montrer que $\gamma(G) + \alpha(G) \leq n+1$

Soit S un ensemble stable maximal, donc de cardinal α. Les sommets restants sont donc au nombre de n-α.
Soit la coloration évidente suivante : tous les sommets de S avec 1 couleur et tous les autres chacun de couleur différente.
Cette coloration est, à l'évidence admissible et utilise 1 + (n-α) couleurs ; ce nombre est donc supérieur ou égal à γ.