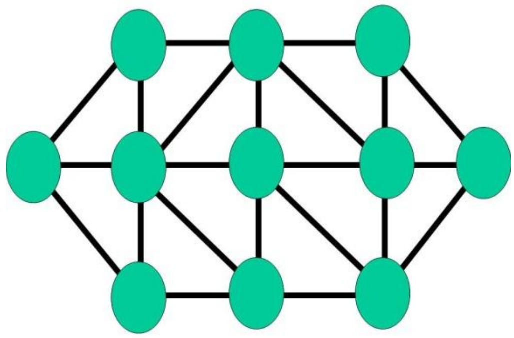
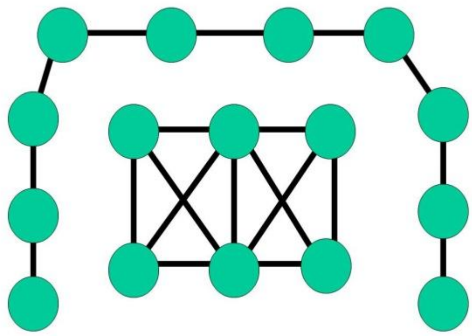
THEORIE DES GRAPHES
TD N°4

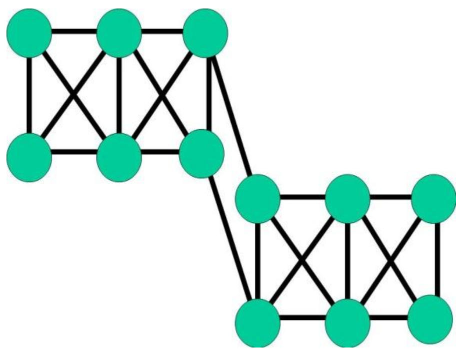
Exercice 1 :

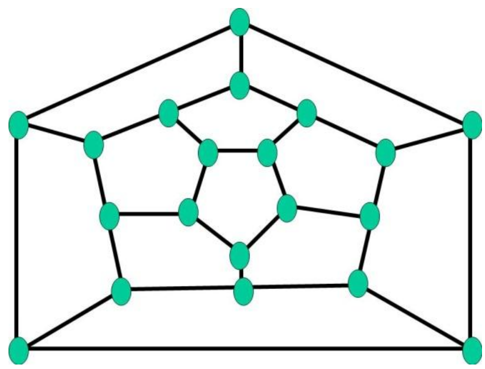
Le sélectionneur de l'Equipe de France de Rugby désire constituer une équipe de 15 joueurs où chaque joueur aurait déjà été coéquipier de 7 autres exactement (et donc ne connaitrait pas les 7 restants), de façon à assurer à la fois cohérence et originalité du jeu pratiqué. Il vous demande de l'aider. Pouvez-vous le faire ?

Exercice 2 : Déterminer κ pour les 4 graphes ci-dessous :









Exercice 3 :

Montrer qu'un graphe simple d'ordre n (n > 2) dont les degrés de tous les sommets sont supérieurs ou égaux à n/2 est hamiltonien (i.e. possède un cycle hamiltonien, c'est à dire passant par tous les sommets du graphe).

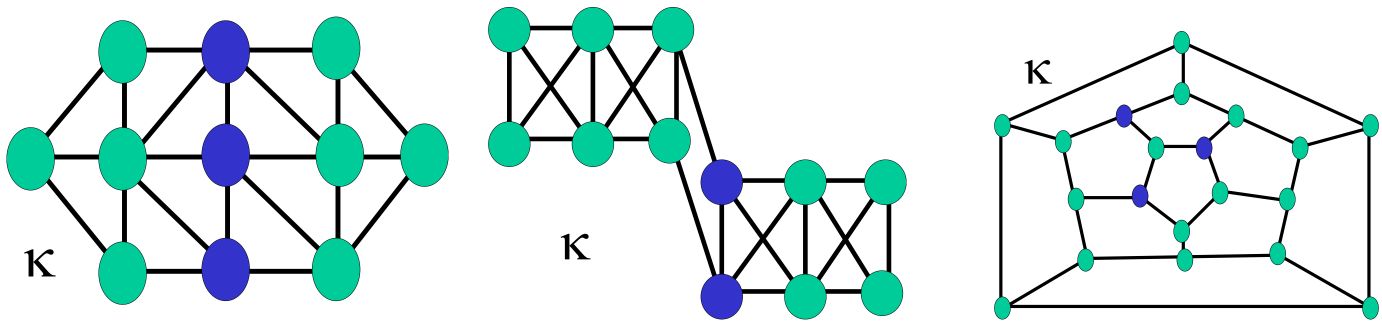
Indication :
Considérer un graphe satisfaisant aux hypothèses et non hamiltonien maximal.
Considérer deux sommets x et y non adjacents.
Considérer la chaîne hamiltonienne joignant x et y (en montrer l'existence)
Considérer l'ensemble S des sommets de cette chaîne dont les successeurs sont adjacents à x et l'ensemble T des sommets de cette chaîne adjacents à y.

CORRECTIONS

Exercice 1 :

Si on construit le graphe des connaissances, il aura 15 sommets tous de degré 7, la somme des degrés sera alors égale à 7x15=105 arcs ; or la somme des degrés = 2m, elle doit donc être paire.
C'est donc impossible.

Exercice 2 :



Exercice 3 :

Considérons un graphe satisfaisant aux hypothèses et non hamiltonien maximal.

Considérons deux sommets x et y non adjacents.

Si on rajoute l'arc xy qui n'existe pas dans le graphe, le graphe ainsi obtenu ne sera plus non hamiltonien : il existera donc un cycle hamiltonien ; en enlevant l'arc xy de ce cycle, on obtient une chaîne hamiltonienne de x à y

Soit (x_1, x_2, x_3…….,x_n) la chaîne hamiltonienne de x à y : x_1 = x et x_n = y.

Considérons l'ensemble S des sommets de cette chaîne dont les successeurs sont adjacents à x :

Le nombre de sommets de S est supérieur ou égal à n/2

Considérons l'ensemble T des sommets de cette chaîne adjacents à y. Il en est de même pour T.

On en déduit que l'intersection de S et de T est non vide.

Soit x_i le sommet commun à S et T : x_{i+1} est adjacent à x et x_i est adjacent à y :

(x_1, x_2, x_3… x_i, y, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3},… x_{i+1}, x) est un cycle hamiltonien.

CONTRADICTION.